2021 年池州市普通高中高三教学质量统一监测

数学（理科）参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	A	C	B	D	D	A	B	A	B

12．设点M坐标为（x,y）,P点坐标为（x_0,y_0）,因为P，M,E共线所以$\overrightarrow{PE}\,/\!/\,\overrightarrow{ME}$，

得$y_0(x-1)=y(x_0-1)$

因为$y_0=x_0+3$，得$\begin{cases}x_0=\frac{y+3x-3}{y-x+1}\\ y_0=\frac{4y}{y-x+1}\end{cases}$ ①

CD的直线方程为$(x_0-1)(x-1)+y_0y=4$ ②

将①代入②得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，所以$M$点的轨迹是以$\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$为圆心，

以$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的圆，所以AM的最大值为$3\sqrt{2}$

注：本题也可先求 CD 过定点，然后再求解.

二、填空题

13．$[-6,6]$　　14．6　　15．5π　　16．$-2-2\sqrt{3}$

16．$\{a_n\}$是以$\frac{\pi}{3}$为首项，以$\frac{\pi}{4}$为公差的等差数列，所以$a_n=\frac{\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{4}$，

由$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{tana_{n+1}-tana_n}{1+tana_{n+1}tana_n}$，可知$1+tana_{n+1}tana_n=tana_{n+1}-tana_n$

$S_{2021}=(tana_2-tana_1)+(tana_3-tana_2)+\cdots+(tana_{2022}-tana_{2021})$

$\quad=tana_{2022}-tana_1\quad=-2-2\sqrt{3}$

三、解答题

17．解：(Ⅰ)由图可知：$A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，即$T=\pi$，……………………………………………2 分

根据$T=\frac{2\pi}{\omega}$得$\omega=2$，…………………………………………………………………… 3 分

由$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$得$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，………………………………….…4 分

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$　函数 $f(x)$ 的解析式为$f(x)=2sin\,(2x+\frac{\pi}{6})$.　……………6 分

(Ⅱ) 由$f(A)=1$可得$A=60^0$, ……………………………………………………………..….7 分

因为AD为$\angle BAC$的角平分线，所以$\angle BAD=\angle DAC=30^0$

又因为$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}$，……………………………………………………….. ..9 分

即$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot sin\angle BAC=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot sin\angle BAD+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot sin\angle CAD$ …………...11 分

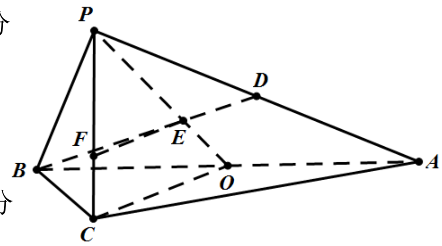
$AB=1,AC=3$代入可得$AD=\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　　　……………………………………………..12 分

18．解：（Ⅰ）因为D、O分别为线段PA、AB的中点，所以BD和PO的交点E为ΔPAB的重心，

所以$\frac{PE}{EO}=2$ ……………………………………………....2 分

因为$EF//$平面ABC，$EF\subset$平面PCO，平面$PCO\cap$平面$ABC=CO$

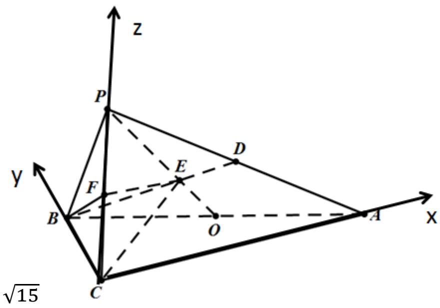
所以$EF//CO$,所以$\frac{PF}{FC}=\frac{PE}{EO}=2$ …………………………5 分



（Ⅱ）设$BC=2$,则$AB=4,PC=2,CF=1,$

以CA,CB,CP为x,y,z轴建立空间直角坐标系，如图

$F(0,0,1),B(0,2,0),C(0,0,0),E(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ …………………7 分



设平面FBE的法向量为$\vec{n}=$（x_1,y_1,z_1），

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$得$\vec{n}=$（0，$y_1$，$2y_1$）

令$y_1=1$，$\vec{n}=$（0，1，2） ……………………………..9 分

设平面CBE的法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$得$\vec{m}=$（1，0，$-\sqrt{3}$）……………….....11 分

二面角$F-BE-C$的平面角为θ，则$|cos\theta|=|cos<\vec{n},\vec{m}>|=\frac{\sqrt{15}}{5}$

所以$sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$ ……………………………………..…12 分

19．解：（Ⅰ）方案一中检测次数ξ可能取值为 1,2,3,4,5,6． …………………………………1 分

当$\xi=1,2,3,4,5$时，$P=\frac{1}{7}$；当$\xi=6$时，$P=\frac{2}{7}$ ………………………………4 分

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

期望为$E(\xi)=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}+5\times\frac{1}{7}+6\times\frac{2}{7}=\frac{27}{7}$ ………………...5 分

注：如果写成$\xi=1,2,3,4,5,6,7$,而当$\xi=1,2,3,4,5$,时的概率算对了，则给 1 分

（Ⅱ）方案二中化验次数η可能取值为 2,3,4,5 .

$P(\eta=2)=\frac{C_6^4}{C_7^5}\cdot\frac{A_4^4}{A_5^5}+\frac{C_6^5}{C_7^5}=\frac{3}{7}$, ………………………………………………......6 分

$P(\eta=3)=\frac{C_6^4}{C_7^5}\cdot\frac{A_4^4}{A_5^5}=\frac{1}{7}$, ……………………………………………………......7 分

$P(\eta=4)=\frac{C_6^4}{C_7^5}\cdot\frac{A_4^4}{A_5^5}=\frac{1}{7}$, ……………………………………………………......8 分

$P(\eta=5)=\frac{C_6^4}{C_7^5}\cdot\frac{C_2^1A_4^4}{A_5^5}=\frac{2}{7}$ …………………………………………………………9 分

方案一所检测的次数不少于方案二的概率为

$P=P(\xi=2)P(\eta=2)+P(\xi=3)[P(\eta=2)+P(\eta=3)]+P(\xi=4)\big[P(\eta=2)+$

$P\big((\eta=3)\big)+P(\eta=4)\big]+P(\xi=5)+P(\xi=6)=\frac{33}{49}$……………………………………12 分

法二：$P=P(\eta=2)\left[1-\frac{1}{7}\right]+P(\eta=3)\left[1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right]+P(\eta=4)\left[1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right]+P(\eta=5)$

$\left[1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right]=\frac{33}{49}$……………………………………………………………12 分

20．（Ⅰ）因为$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

又$|PF_2|=\frac{1}{2}$，得$\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………...…4 分

（Ⅱ）设$l_1:y=kx+1,l_2:y=\frac{1}{k}x+1$,设点M,N的坐标分别为$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=kx+1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$联立得$(4k^2+1)x^2+8kx=0$，………………………...…5 分

解得 $x_1=\frac{-8k}{4k^2+1}$，$y_1=\frac{1-4k^2}{4k^2+1}$ 即$M(\frac{-8k}{4k^2+1}$，$\frac{1-4k^2}{4k^2+1})$ ……………………….......7 分

用$\frac{1}{k}$替代M坐标中的k，从而得到N坐标为（$\frac{-8k}{4+k^2}$，$\frac{k^2-4}{4+k^2}$） ………….………8 分

则直线MN的斜率为 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1-4k^2}{4k^2+1}-\frac{k^2-4}{4+k^2}}{\frac{-8k}{4k^2+1}-\frac{-8k}{4+k^2}}=-\frac{k^2+1}{3k}$ …………………………..9 分

所以直线MN的方程为$y-\frac{1-4k^2}{4k^2+1}=-\frac{k^2+1}{3k}$（$x-\frac{-8k}{4k^2+1}$）

化简得$y=-\frac{k^2+1}{3k}x-\frac{5}{3}$ …………………………………………………………10 分

所以直线MN恒过定点A（0，$-\frac{5}{3}$） ………………………………………………12 分

21．(Ⅰ)$\forall\ x>0$,都有$f(x)>0$，即$\forall\ x>0$,都有$ae^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$，

即$a>\left(\frac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}\right)_{max}$ …………………………………………………...…1 分

令$h(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x}<0$ ……………………………………..…2 分

所以 $h(x)$在（0，$+\infty$）上单调递减，则$h(x)<h(0)=1$ ……………..………4 分

所以$a\geq 1$ ……………………………………………………………5 分

（Ⅱ）$x>0$时，e^{x+1-a}关于a单调递减，$\frac{1}{2}ax$关于a 单调递增，$\sqrt{x^2+ax+1}$关于a 单调递增

因此$g(x)$关于a 单调递减， …………………………………………………….…6 分

因为$0<a\leq 1$,所以$g(x)\geq e^x-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$ …………………………….8 分

由（1）可知$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$，即$e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1$…………………………9 分

所以$g(x)\geq e^x-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>\frac{1}{2}x^2+x+1-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)^2>0$$

因此可知对任意$x>0$，$0<a\leq 1$，都有$g(x)>0$ 成立 …………………..……12 分

22．（Ⅰ）直线l的普通方程：$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$； …………………………2 分

曲线 C 的普通方程 $x^2+y^2=4$ …………………………4 分

（Ⅱ）已知点 P 在直线l上，则可设直线 l 与曲线 C 相交的两点 A、B 对应的参数分别为t_1、t_2

将直线l的参数方程和曲线 C 的普通方程联立，

得 $\left(\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2=4$ ……………………5 分

化简得 $t^2+3t-1=0$ 则$t_1+t_2=-3$，$t_1t_2=-1<0$ ………6 分

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\sqrt{13}$ ……………..…..10 分

23．（Ⅰ）当$a=0$时，$f(x)=|x|+|x+2|=\begin{cases}-2x-2, x\le -2\\ 2,-2<x<0\\ 2x+2, x\ge 0\end{cases}$ ……………………1 分

则$f(x)>3x+4$等价于$\begin{cases}-2x-2>3x+4\\ x\le -2\end{cases}$或$\begin{cases}2>3x+4\\ -2<x<0\end{cases}$或$\begin{cases}2x+2>3x+4\\ x\ge 0\end{cases}$ ..….2 分

解得$x<-\frac{2}{3}$, ……………………………………………………..…………….4 分

所以不等式$f(x)>3x+4$的解集为$\left\{x\middle|x<-\frac{2}{3}\right\}$； ………………………………..5 分

（Ⅱ）因为$f(x)=|x-a|+|x+2|\ge|(x-a)-(x+2)|=|-a-2|=a+2$，

(当且仅当$(x-a)(x+2)\le 0$ 时等号成立) …………………………………..………...7 分

所以$f(\mathrm{x})$的最小值为$a+2$, 因此$m=a+2$，

所以$m+b=a+2+b=4$，即$a+b+1=3$，

所以$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}\right)(a+b+1)$ …………………………….….……….8 分

$=2+\frac{b+1}{a}+\frac{a}{b+1}\ge 2+2\sqrt{\frac{b+1}{a}\cdot\frac{a}{b+1}}=4$（当且仅当$a=\frac{3}{2}$且$b=\frac{1}{2}$时等号成立）.

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}$的最小值为$\frac{4}{3}$. ……………………………………………………10 分